Tema 2. PROBABILIDAD.

2.1.- Introducción.

Fenómenos deterministas: siempre que se realizan bajo las mismas condiciones se obtienen los mismo resultados.

Soltar un dado … se cae. Horario del AVE

Fenómenos aleatorios: no es posible predecir el resultado (incertidumbre)

Resultado del dado. Horario de autobuses EMT … E, por ejemplo.

Probabilidad ≈ medida de la posibilidad de que se dé un resultado determinado

Históricamente surgió el estudio de la probabilidad a partir del estudio de juegos de azar.

2.2.- Espacio muestral y espacio de sucesos.

Experimento aleatorio: no es posible predecir el resultado pero se conocen todos los posibles resultados; el experimento se puede repetir todas las veces que se desee.

EJ: tirar un dado, sacar **una carta de una baraja española**

Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento (llamados **sucesos elementales**). Se denota por *E*.

Suceso compuesto es el formado por varios sucesos elementales. Es un subconjunto de *E.*

Suceso seguro es el suceso que se verifica siempre. Se denota por *E*.

Suceso imposible es el que no se verifica nunca. Se denota por $\varnothing$.

Espacio de sucesos es el conjunto formado por todos los sucesos compuestos incluido el suceso imposible. Se denota por *P(E)*. Si *E* tiene *n* elementos *P(E)* tiene 2^n.

Observación: sucesos ≈ conjuntos, en consecuencia las operaciones con conjuntos (unión, intersección, complementación, inclusión, etc) pueden trasladarse a este espacio.

Operaciones con sucesos (álgebra de sucesos):

EJ. A: salir oro, B: salir figura

Sean $A, B \in P(E)$:

$A \cup B$, **suceso unión** de *A* y *B* se verifica cuando ocurre *A*, *B* o ambos a la vez.

$A \cap B$, **suceso intersección** de *A* y *B* se verifica cuando ocurren al tiempo *A* y *B*.

$\bar{A}$, **suceso contrario** de *A* se verifica cuando no lo hace *A*.

Leyes de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$A - B$, **suceso diferencia** se verifica cuando ocurre *A* pero no *B* ($A \cap \overline{B}$).

Dos sucesos *A* y *B* son **sucesos incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

EJ: que lo digan ellos

Que hagan **Problema 1.**

Estos conceptos se pueden generalizar para cualquier subconjunto de *P(E)*:

Decimos que $\Omega \subset P(E)$ es una **σ-álgebra de sucesos** si verifica:

1. $\varnothing \in \Omega$.
2. Si $A \in \Omega$, entonces $\overline{A} \in \Omega$.
3. Si $\{A_i\} \subset \Omega, i \in$ N, entonces $\left(\bigcup_{i \in N} A_i \right) \in \Omega$.

EJ: Tirar un dado, $\Omega = \{\varnothing, \{2,4,6\}, \{1,3,5\}, E = \{1,2,3,4,5,6\}\}$.

2.3.- Definición axiomática de probabilidad. Consecuencias.

EJ: Experimento: elegir al azar a un alumno del SM22 y hacerle una pregunta del cuestionario del primer día.

¿Cuál sería la probabilidad de que fuera chica?

¿Cuál sería la probabilidad de que sus padres fueran los dos de Madrid?

¿Cuál es la probabilidad de que no se haya leído al menos un libro? ¿Cuál es la probabilidad de que haya visto al menos una película?

¿Cuál sería la probabilidad de que haya aprobado más de diez asignaturas el año pasado?

¿Dónde buscamos esa información? Frecuencias relativas

Sea $\Omega \subset P(E)$ una **σ-álgebra de sucesos**. Decimos que la aplicación $P : \Omega \to \mathbb{R}$ es una **probabilidad** si verifica los siguientes axiomas:

1. $P(A) \geq 0, \ \forall A \in \Omega$
2. $P(E) = 1$
3. Si $\{A_i\} \subset \Omega, i \in I$, son sucesos incompatibles dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$), entonces $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$.

A la terna (E, Ω, P), se le denomina **espacio probabilístico**.

Problema 2

Propiedades:

- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (P(sacar 2) ≤ P(sacar PAR))
- $0 \leq P(A) \leq 1$ (pues todo suceso está incluido en E y su probabilidad será ≤1)
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ (pues A ∪ noA = E, y la suma de sus probabilidades da 1) (P(sacar PAR)=1-P(sacar impar))
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ P(sacar múltiplo de 2 o múltiplo de 3)
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) +$

  $+ \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^n P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$

Si el dado no hubiera estado trucado (la probabilidad es igual en todos los casos), los cálculos son más sencillos: basta contar.

- **Regla de Laplace:**

Sea $E = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, siendo los $\boldsymbol{A_i}$ sucesos elementales e incompatibles dos a dos. Supongamos además que $P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = \frac{1}{n}$ (**Sucesos equiprobables**).

Entonces, si $B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, con $k \le n$ se tiene que :

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) = \frac{k}{n}.$$

También se enuncia como:

$$P(B) = \frac{\text{Número de casos favorables al suceso } B}{\text{Número de casos posibles}}$$

Si lo hubiera sabido el Caballero de Mere más le hubiera valido.

Repaso de combinatoria.

- Principio de adición:

  Dados dos conjuntos *A* y *B* finitos disjuntos, *A* con *n* elementos y *B* con *m* elementos, el número de formas distintas de elegir un elemento de alguno de los dos conjuntos es $n+m$.

  Si $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$, entonces $|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$.

  Ej: Sacamos una carta, que salga oro o espadas.

- Principio de inclusión-exclusión:

  En general $|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|$.

  Ej: Sacamos una carta, que salga oro o figura.

- Principio de multiplicación:

  Dados A y B conjuntos finitos no vacíos, *A* con *n* elementos y *B* con *m* elementos, entonces el número de elementos de su producto cartesiano $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\}$ es $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$.

  Ej: Elección de un menú. Número de posibles elecciones si hay 4 posibles primeros, 3 segundos y 5 postres.

- Selecciones sobre conjuntos

  Dado un conjunto *A* de *n* elementos, ¿de cuántas formas distintas se pueden seleccionar *r* elementos de *A*?

  Hay que tener en cuenta:

  - Si el **tamaño** de la selección coincide con el número de elementos ($r=n$)
  - Si hay que tener en cuenta el **orden** de los elementos o no.
  - Si se permiten **repeticiones** de elementos o no.

Distinguimos:

- Variaciones ($r<n$, importa el orden, no se repiten elementos)

$V_{n,r}$ son el número de grupos **ordenados** de *r* elementos **distintos** que se pueden formar con *n* elementos.

$$V_{n,r}= n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-r+1)$$

Ej: palabras de cinco letras en las que no se repita ninguna (26 palabras en el alfabeto) ($V_{26,5}$=7.893.600)

- Permutaciones ($r = n$, importa el orden, no se repiten elementos)

P_n son el número de las distintas formas de ordenar *n* elementos.

$$P_n = n!$$

Ej: posibles formas de ordenar las vocales (5!)

- Combinaciones ($r<n$, no importa el orden, no se repiten elementos)

$C_{n,r}$ son el número de grupos de *r* elementos **distintos** que se pueden formar con *n* elementos.

$$C_{n,r} = \frac{V_{n,r}}{P_r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Ej: casos posibles al repartir 4 cartas de una baraja de 40. (91390)

Casos posibles de que te toquen 4 reyes (jugando al mus) $C_{8,4}$=70

P(toquen 4 reyes)=0.00076 ... pero a veces pasa.

- Variaciones con repetición (importa el orden, hay repetición, pueden cambiar los elementos)

$VR_{n,r}$ son el número de grupos **ordenados** de *r* elementos que se pueden formar con *n* elementos, que pueden repetirse.

$$V_{n,r}= n^r$$

Ej: matrículas distintas que sólo tengan los dígitos 5,7,9. ($VR_{3,4}$=81)

- Permutaciones con repetición (importa el orden, hay repetición, siempre los mismos elementos)

$P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ son el número de las distintas formas de ordenar *k* elementos, de forma que el primero se repite r_1 veces, el segundo r_2 veces, ... y el *k*-ésimo r_k veces, y se verifica que $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.

$$P_n^{r_1,r_2,\dots,r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!}$$

Ej: posibles palabras con las letras de ESTADÍSTICA. ($P_{11}^{2,2,2,2,1,1,1} = 4989600$)
ABRACADABRA: ($P_{11}^{5,2,2,1,1} = 83160$)

- o Combinaciones con repetición (no importa el orden, hay repetición, pueden cambiar los elementos)

$CR_{n,r}$ son el número de grupos de *r* elementos que se pueden formar con *n* elementos, que pueden repetirse.

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Ej: resultados posibles al tirar 4 dados iguales. ($CR_{6,4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = 126$)

(es equivalente a $P_{n+r-1}^{n-1,r}$. Es el problema de meter r bolas iguales en n cajas distintas. La idea es tener r elementos iguales (b) y (n-1) elementos iguales (C) (que representan la "separación entre las cajas"). Si queremos meter 6 bolas iguales en 4 cajas:

bbcbccbbb representa que hay 2 bolas en la 1ª caja, 1 bola en la 2ª, 0 bolas en la 3ª y 3 bolas en la 4ª.

bcbcbcbbb representa que hay 1 bola en la 1ª caja, 1 bola en la 2ª, 1 bola en la 3ª y 3 bolas en la 4ª.

Olimpiadas 2004, atletismo, prueba de los 1500 metros. Hay 36 competidores y la final la disputan 12 atletas.

1. Número de posibles finales distintas $C_{36,12} = 1.251.677.700$
2. Conocidos los 12 finalistas:.
   a. Número de posibles resultados distintos $P_{12} = 479.001.600$
   b. Número de posibles distribuciones de medallas $V_{12,3} = 1320$

Entre los competidores hay 10 europeos, 14 africanos, 7 americanos y 5 asiáticos.

3. Número de posibles finales en las que haya 4 europeos, 4 africanos y 4 americanos. $\binom{10}{4}\binom{14}{4}\binom{7}{3}\binom{5}{1} = 36.786.750$
4. Número de posibles distribuciones de medallas en las que haya al menos 2 europeos. $\binom{10}{2}\binom{26}{1}3! + \binom{10}{3}3! = 4.230$

Si sólo tenemos en cuenta el continente del que son los competidores y se sabe que en la final hay 4 europeos, 5 africanos y 3 americanos:

5. Número de posibles resultados distintos. $P_{12}^{4,5,3} = \frac{12!}{4!5!3!} = 27.720$
6. Número de posibles distribuciones de medallas $VR_{3,3}=27$
7. Número de posibles “podium” distintos $CR_{3,3} = \binom{5}{3} = 10$

Problemas: Hacer 3,8,9 dejar para después y que vayan intentando 7,10

2.4.- Probabilidad condicionada.

Estamos jugando a tirar 2 dados y sumar la puntuación.
¿Cuál es la probabilidad de obtener 2?, ¿y 12?, ¿y 7?

Pero si un dado se tira antes y sale 1, ¿cuál es ahora la probabilidad de obtener 2?, ¿y 12?, ¿y 7?

La información de lo que ha salido en el primer dado **condiciona** la probabilidad del resultado final.

En el experimento de elegir al azar a una persona de la clase y preguntar una probabilidad de algo de lo preguntado en el cuestionario:

¿cómo se calcularía la probabilidad de que habiendo elegido una chica haya leído más de un libro? ¿y de que habiendo sido chico haya leído 10 o más libros?

Se llama **probabilidad de *B* condicionada por *A*** a la probabilidad de que ocurra "*B*" sabiendo que ha ocurrido "*A*". Se denota por $P(B/A)$ y, si $P(A)>0$, verifica que:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

De lo anterior se deduce que $P(B\cap A)=P(A)P(B/A)$.

Propiedades:

La probabilidad condicionada tiene las mismas probabilidades que cualquier probabilidad. Sean A, B y C sucesos tales que P(C)>0.

- $0\leq P(A/C)\leq 1$
- $P(A)=1-P(\overline{A})$
- $P(A\cup B/C)=P(A/C)+P(B/C)-P(A\cap B/C)$
- $A\subset B\subset C\Rightarrow P(A/C)\leq P(B/C)$

Observación: Para distinguir P(A/B) de P(A∩B):

- P(A/B) cuando B **ya ha sucedido** (no hay incertidumbre sobre si ocurre B o no)
- P(A∩B) cuando B **puede ocurrir o no**, no se sabe a priori.
- Con P(A/B), los "casos posibles" son los favorables a B, y los "casos favorables" los de A∩B.
- Con P(A∩B), los "casos posibles" son todos los del experimento y los "casos favorables" los de A∩B.

Ejemplos: Experimento de tirar dos dados y sumar la puntuación. Hallar las siguientes probabilidades:

- obtener al menos un 6: 11/36
- obtener una suma de 10: 3/36
- sabiendo que ha salido un 6, obtener una suma de 10: 1/11
- obtener una suma de 10 y que en un dado haya salido un 6: 2/36
- sabiendo que suman 10, que en un dado haya salido un 6: 2/3

Ejercicio: Expresar las siguientes probabilidades de forma adecuada (condicionada, intersección de sucesos,…):

a) entre los alumnos matriculados en Estadística que han estudiado la asignatura, la probabilidad de aprobar es del 80%;
b) la probabilidad de encontrar a un alumno matriculado en Estadística que haya estudiado y haya aprobado Estadística es del 30%
c) si los datos muestran que el 80% de los alumnos matriculados en estadística han aprobado

¿qué conclusiones podemos sacar, que todos han estudiado o que aprobar no depende de estudiar?

2.5.- Independencia de sucesos.

Traspa independencia. (Operación, hay un 99% de probabilidades de éxito. Esperamos a que una vaya mal y pedimos que nos operen inmediatamente después ... ¿hay más probabilidad de éxito?)

Se dice que ***A* y *B* son independientes** si $P(A/B) = P(A)$.
(El que haya ocurrido o no *B* no influye en la probabilidad de que ocurra *A*.)

Teorema. *A* y *B* son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

En general, $\{A_1, \dots, A_n\}$ son **sucesos independientes** si, para toda subcolección $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ se verifica que $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$.

Ejemplo:

Se tiran dos dados, uno azul y otro rojo.
A: la suma es par 1/2
B: salir par en el dado rojo 1/2
C: obtener una suma de 10: 3/36
D: obtener al menos un 1: 11/36

A y B son independientes: P(A/B)=9/18=1/2=P(A). $P(A \cap B)=9/36=1/4=1/2*1/2$
A y C no son independientes: P(A/C)=1. $P(A \cap C)=3/36 \neq 1/2*3/36$.
$\bar{A}$ y B ¿son independientes? ¿son incompatibles?
C y D ¿son independientes? ¿son incompatibles?

Observación:

- Si A y B son independientes, también lo son $\bar{A}$ y $\bar{B}$, $\bar{A}$ y B, A y $\bar{B}$.
- Si A y B son independientes (con probabilidad no nula), no pueden ser incompatibles. Si son incompatibles no pueden ser independientes.

Problema 5

Aplicación:

Se tiene un circuito con 3 componentes independientes, cuya probabilidad de funcionar es de 0.95. Calcular la probabilidad de que la señal llegue al final del circuito en cada caso:

Las componentes se colocan **en serie**:
$(0.95)^3 = 0.8573$
Las componentes se colocan **en paralelo**:
$P(F1 \cup F2 \cup F3)=$
$P(F1)+ P(F2)+ P(F3) - P(F1 \cap F2) - P(F1 \cap F3) - P(F3 \cap F2) + P(F1 \cap F2 \cap F3) =$
$3*0.95 - 3*(0.95)^2 + (0.95)^3 = 0.9998$

Sugerir que hagan **Problema 12.**

2.6.- Teorema de la Probabilidad Total. Teorema de Bayes.

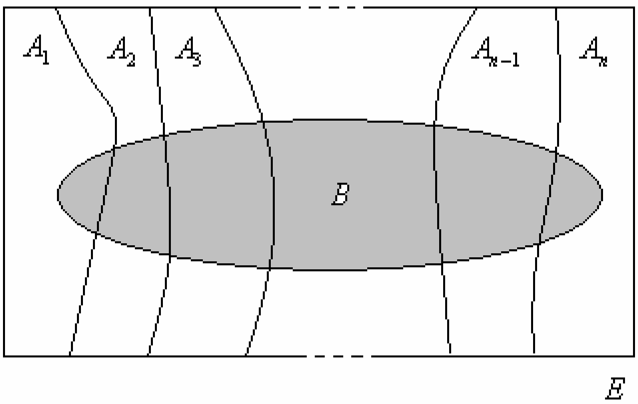
Ejemplo:

Una empresa tiene 25% de ordenadores de marca y 75% clónicos. Se estima que la probabilidad de que se estropee antes de un año un ordenador de marca es del 5% y la de que se estropee un ordenador clónico del 10%. Elegido un ordenador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se estropee antes de un año?

0.1*0.75+0.05*0.25= 0.0875 (8.75%)

Teorema de la Probabilidad Total.

Sean $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_n$ sucesos incompatibles dos a dos ($\boldsymbol{A}_i \cap \boldsymbol{A}_j = \varnothing$, $\forall \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$), y tales que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i\right) = \boldsymbol{E}$.



Sea *B*∈*P(E)* un suceso cualquiera, entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i).$$

En las hipótesis anteriores:
sabiendo que un ordenador se ha estropeado antes de un año, ¿cuál es la probabilidad de que sea de marca?
P(M/E)=P(M∩E)/P(E)=P(E/M)P(M)/P(E)=0.05*0.25/ 0.0875=0.14 (14%)

Teorema de Bayes.

En las hipótesis del teorema anterior, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ se verifica:

$$P\left(A_k/B\right)=\frac{P\left(B/A_k\right)P\left(A_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}P\left(B/A_i\right)P\left(A_i\right)}$$

Lo siento pero escribo esto en 2009 y he visto que se me olvidó poner el ejemplo… seguro que encontráis alguno…¡¡suerte!!