# Tema 3. VARIABLES ALEATORIAS.

## *3.1.- Introducción.*

Objetivo: Encontrar modelos matemáticos para el trabajo con probabilidad de sucesos. En particular, se quiere **trabajar con funciones reales de variable real**.

Una probabilidad es una función $P:\Omega \to \mathbb{R}$, donde $\Omega$ es un álgebra de *sucesos*. Queremos trabajar con probabilidades a partir de funciones F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

## *3.2.- Variables aleatorias.*

Idea: Asociar cada resultado del experimento con un número y así podremos ya trabajar sólo con números reales. Una variable aleatoria (v.a.) será una función que asigne a cada suceso un número.

Ejemplo:

1) X1: Sensación que provocan las asignaturas de matemáticas

Asociamos cada respuesta con un número, según se considere que la sensación es positiva (+1), negativa (–1) o neutra (0). Por ejemplo:

| **Sensa Mates** | **X1** |
|---|---|
| buena | 1 |
| miedo | -1 |
| pesadas | -1 |
| trabajo | -1 |
| mal rollo | -1 |
| no me provocan | 0 |
| desagradable | -1 |
| curiosidad | 1 |
| ninguna | 0 |
| no me gustan | -1 |
| puff | -1 |

2) X: Número de caras al lanzar 3 monedas

| **Sucesos** | **X4** |
|---|---|
| {x,x,x} | 0 |
| {c,x,x} | 1 |
| {x,c,x} | 1 |
| {x,x,c} | 1 |
| {c,c,x} | 2 |
| {x,c,c} | 2 |
| {c,x,c} | 2 |
| {c,c,c} | 3 |

**Opcional:**

La formalización del concepto de variable aleatoria es la siguiente:

***Definición.***

***Sea E el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio** y Ω un álgebra de sucesos asociado a E. **Llamaremos variable aleatoria a una función***

$$\boldsymbol{X} : \boldsymbol{E} \rightarrow \mathbb{R},$$

*tal que para cualquier intervalo B = (-∞, b] de la recta real, el suceso* $X^{-1}(B) \in \Omega$ *siendo* $X^{-1}(B) = \{\omega \in E \,/\, X(\omega) \in B\}$.

*Ejemplos.*

*1) X1: Sensación que provocan las asignaturas de matemáticas*

$X1^{-1}((-\infty,-1]) = X1^{-1}(-1) = \{$*miedo, pesadas, mal rollo, puff,…*$\}$

*(sucesos a los que X1 asigna el valor –1)*

*2) X: Número de caras al lanzar 3 monedas*

$X^{-1}((-\infty,1]) = X^{-1}(\{0,1\}) = \{\{x,x,x\},\{c,x,x\},\{x,c,x\},\{x,x,c\}\}$

*(sucesos a los que X asigna el valor 0 ó 1)*

***(Fin de lo opcional)***

Con el concepto de v.a. podemos definir probabilidades asociadas a números reales o a intervalos:

$P(X = a) = P(X^{-1}(a))$ =P(sucesos que *X* asocia con el valor *a*) o bien

$P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$ = P(sucesos que *X* asocia con un valor del intervalo *B*)

Ejemplo:

X: Número de caras al lanzar 3 monedas

$$P(X=1) = P\left(X^{-1}(\{1\})\right) = P\left(\{c,x,x\},\{x,c,x\},\{x,x,c\}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P(X \le 1) = P(X \in (-\infty,1]) = P(X=0 \text{ ó } X=1) = P\left(\{x,x,x\},\{c,x,x\},\{x,c,x\},\{x,x,c\}\right) = \frac{4}{8}$$

$$P(X > 2) = P(X=3) = P\left(\{c,c,c\}\right) = \frac{1}{8}$$

Estudiaremos dos tipos de variables aleatorias:

**Discretas**: el conjunto de posibles valores que toma la variable es discreto (es decir, finito o numerable).

**Continuas:** el conjunto de posibles valores es uno o varios intervalos de la recta real.

Ejemplos:

**Discretas:**

X: Número de "caras" al lanzar 3 monedas
(puede tomar sólo los valores 0,1,2,3)

X1: Sensación que provocan las asignaturas de matemáticas
(puede tomar sólo los valores –1,0,1)

X2: Número de llamadas diarias que se hacen por teléfono móvil
(puede tomar los valores 0,1,2,3,... infinito numerable)

**Continuas:**

Y1: Estatura de una población (en centímetros)
(puede tomar cualquier valor en el intervalo [0,250] )

Y2: Error cometido al redondear una nota media a un decimal
(puede tomar cualquier valor en el intervalo [–0.05,0.05] )

Y3: Tiempo máximo que he estado hablando por teléfono alguna vez (en minutos)
(puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0,+\infty)$ )

Para cada tipo definiremos a continuación funciones reales de variable real para trabajar con sus probabilidades:

- **Función de masa** o **distribución de probabilidad** para v.a. discretas.
- **Función de densidad** para v.a. continuas.

Y posteriormente definiremos la **función de distribución** (concepto más general) que nos permite trabajar con **todas las v.a.**

## *3.3.- Variables aleatorias discretas. Función de masa.*

Si tenemos una v.a. discreta la forma habitual de describir sus probabilidades es dar la probabilidad que toma cada uno de los valores que puede tomar:

Ejemplo:

X: Número de caras al lanzar 3 monedas

$$P(X=0)=\frac{1}{8};\ P(X=1)=\frac{3}{8};P(X=2)=\frac{3}{8};P(X=3)=\frac{1}{8}$$

Z: Número de tiradas con un dado hasta que nos sale el primer 5 (puede tomar los valores 1,2,3,.. hasta el infinito)

$$P(X=1)=\frac{1}{6};P(X=2)=\left(\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6};P(X=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\frac{1}{6};\ldots;P(X=\mathbf{n})=\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathbf{n-1}}\frac{1}{6};\ldots$$

Lo denominaremos **distribución de probabilidad de X** o **función de masa de X**.

Para dar una definición general, denotaremos por:

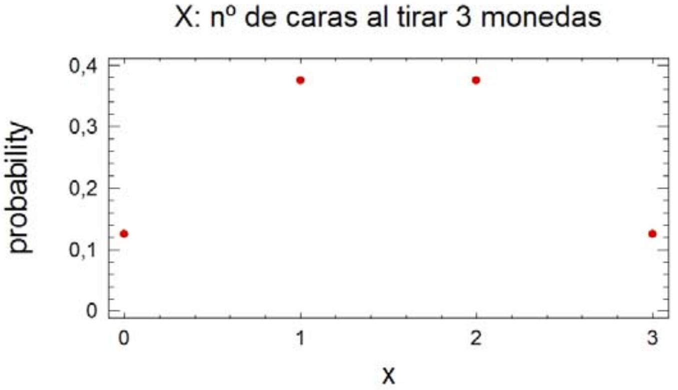
- $\{x_i\}$ a los valores que tienen probabilidad positiva y los denominaremos **puntos de masa** de la v.a. $X$. ( $i\in I$ siendo $I$ un conjunto finito o numerable.)
- $P(X=x_i)=p_i$ a sus probabilidades respectivas, y al conjunto de todas ellas lo denominaremos **función de masa** o **distribución de probabilidad** de la v.a. $X$ .

Se cumple que $P(X=x_i)=p_i\geq 0$ y $\sum_{i\in I} p_i=1$.

La función de masa de las variables aleatorias discretas pueden representarse gráficamente mediante un diagrama donde, en el eje OX dibujaríamos los distintos puntos de masa de la variable y en ordenadas las probabilidades correspondientes.

Ejemplo:

X: Número de caras al tirar 3 monedas

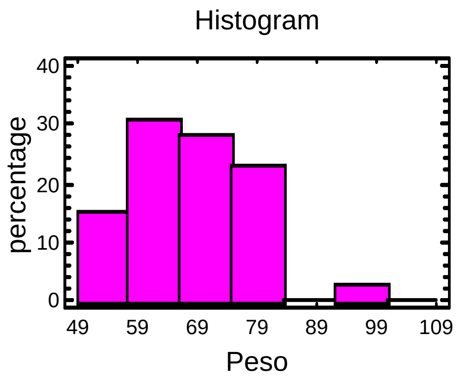


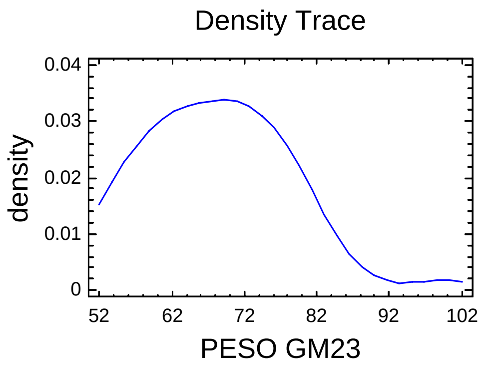

## *3.4.- Variables aleatorias continuas. Función de densidad.*

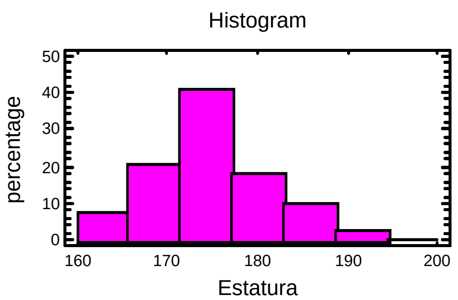
Recordamos que una v.a. X es continua si el conjunto de posibles valores que puede tomar la variable es uno o varios intervalos de la recta real.

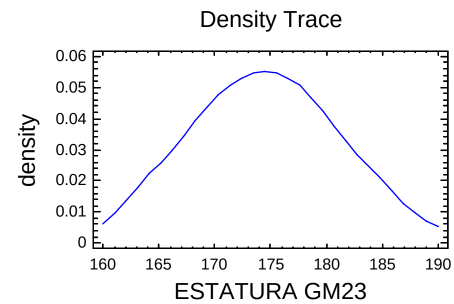
También recordamos que las variables estadísticas continuas se representaban agrupadas en intervalos, y que asociamos probabilidad con frecuencias relativas. Si se tiene un número suficientemente grande de datos, y representamos el histograma de frecuencias relativas (percentage) con las clases cada vez más finas, se obtendría el perfil de una curva que es representativa de la distribución de las frecuencias de dicha variable. Esta curva será siempre positiva (las frecuencias relativas lo son) y "encierra debajo de ella" la suma de todas las frecuencias relativas (1).

Esta idea nos permite caracterizar la distribución de probabilidad de las v.a. continuas mediante una función que denominaremos función de densidad.



**Definición.**
Llamamos **función de densidad** a toda función $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica:

- $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

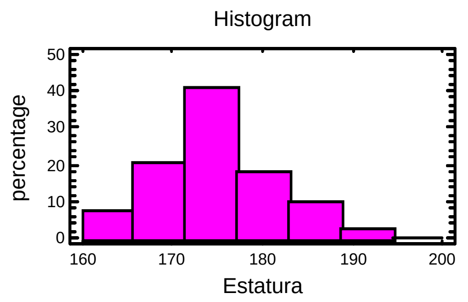
Toda función de densidad determina la distribución de probabilidad de una v.a. continua de la siguiente forma:

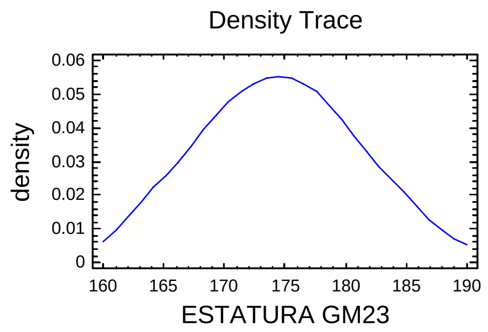
1. $P(a < X < b) = \int_a^b f(t)\,dt, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
2. $P(X = x) = \int_x^x f(t)\,dt = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
3. Entonces $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$

**Observación:** Los valores exactos de las v.a. continuas tienen probabilidad 0. Sólo hay probabilidad no nula en intervalos.

Ejemplos.

**Y1: Estatura de una población**



Función de densidad:

$$\#36: \quad f(x) := \frac{1}{6\cdot\sqrt{(2\cdot\pi)}}\cdot \hat{e}^{-((x-175)/6)^2/2}$$

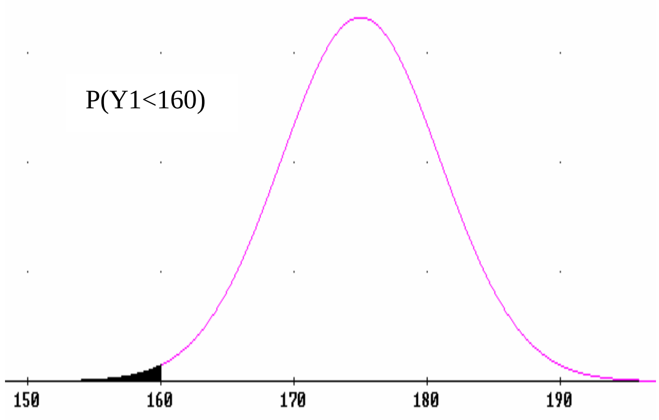
$$\#37: \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6\cdot\sqrt{(2\cdot\pi)}}\cdot \hat{e}^{-((x-175)/6)^2/2}\,dx = 1$$

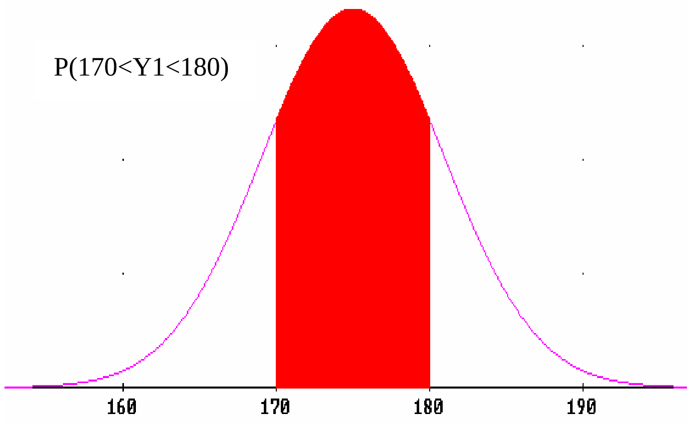
Prob(x < 160) =

$$\#38: \quad \int_{-\infty}^{160} \frac{1}{6\cdot\sqrt{(2\cdot\pi)}}\cdot \hat{e}^{-((x-175)/6)^2/2}\,dx = 0.006209665322$$

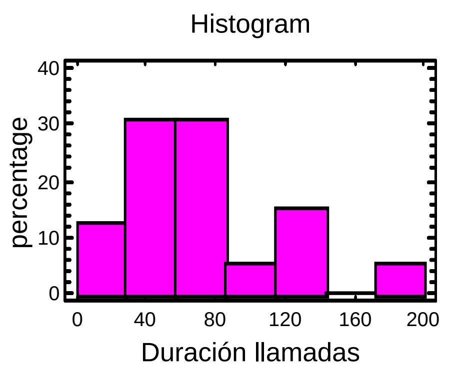
Prob(170 < x < 180) =

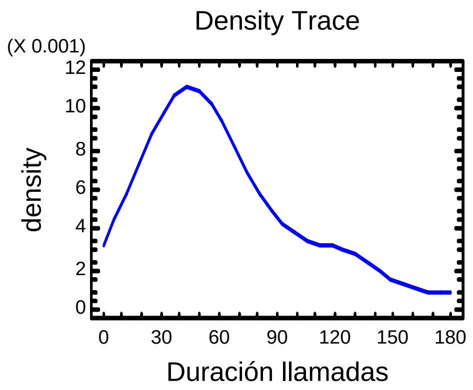
$$\#39: \quad \int_{170}^{180} \frac{1}{6\cdot\sqrt{(2\cdot\pi)}}\cdot \hat{e}^{-((x-175)/6)^2/2}\,dx = 0.5953432380$$




**Y3: Tiempo máximo que he estado hablando por teléfono alguna vez**



Función de densidad y probabilidades:

$$f(x) := 0.04^2 \cdot x \cdot ê^{-0.04 \cdot x} \cdot \mathrm{CHI}(0, x, \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} 0.04^2 \cdot x \cdot ê^{-0.04 \cdot x}\,dx = 1$$

P(Y3>60)=

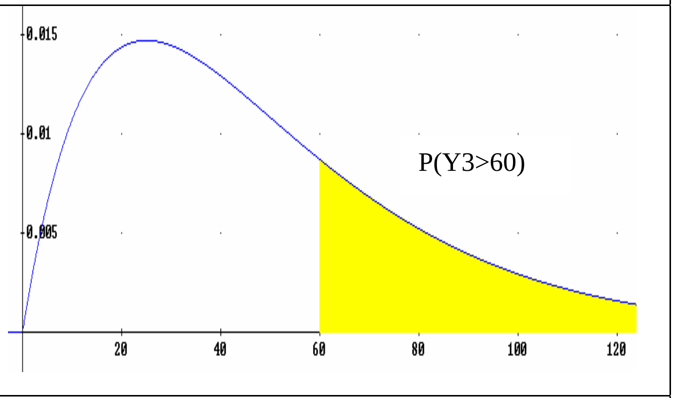
$$\int_{60}^{\infty} f(x)\,dx = 0.3084$$

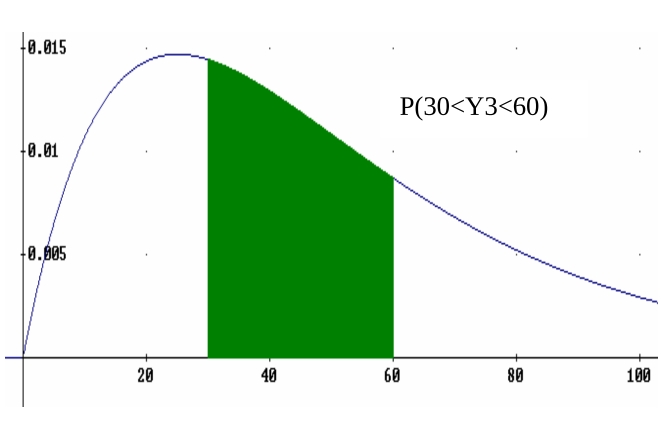
P(30<Y3<60)=

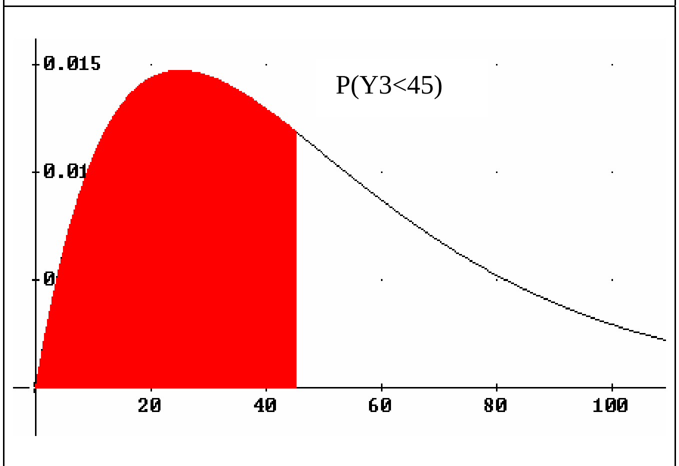
$$\int_{30}^{60} f(x)\,dx = 0.3542$$

P(Y3<45)=

$$\int_{-\infty}^{45} f(x)\,dx = \int_{0}^{45} 0.04^2 \cdot x \cdot ê^{-0.04 \cdot x}\,dx = 0.5372$$




**Y2: error al redondear a un decimal.**

La variable puede tomar valores $-0.05<x<0.05$.

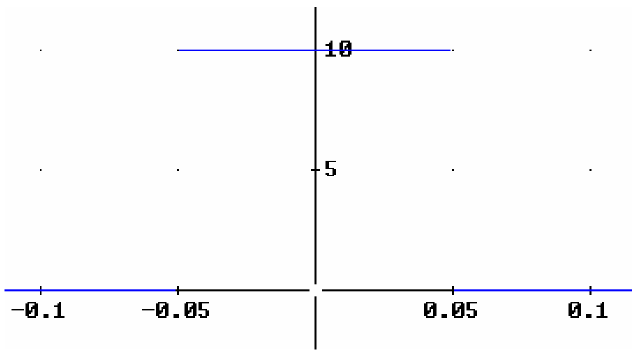
Como la probabilidad es homogénea en todo el intervalo y fuera de él no hay probabilidad, la densidad será una función constante $f(x)=k$ si $-0.05<x<0.05$, y será nula en el resto.

Para hallar el valor de $k$, utilizamos la propiedad de que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \iff \int_{-0.05}^{+0.05} k\,dt = 1 \iff k \cdot 0.01 = 1$$

$$\iff k = 10$$

Por tanto: $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} 10 & \boldsymbol{si}\ -0.05 < \boldsymbol{x} < 0.05 \\ 0 & \boldsymbol{resto} \end{cases}$



Para calcular probabilidades:

$$P(Y2<0)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-0.05} 0\,dt+\int_{-0.05}^{0} 10\,dt=10\cdot 0.05=0.5$$

$$P(|Y2|<0.01)=P(-0.01<Y2<0.01)=\int_{-0.01}^{+0.01} 10\,dt=10\cdot\left(0.01-(-0.01)\right)=0.2$$

### 3.5.- Función de distribución de una variable aleatoria.

Para tener una función representativa **válida para todo tipo de v.a.**, se define la función de distribución.

**Definición.** Dada una variable aleatoria *X*, definimos la **función de distribución** asociada a $X$ a una función *F*: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. definida como

$$F(x)=P(X\leq x)$$

**Observación:** La función de distribución de una v.a. viene a ser como la distribución de **frecuencias relativas acumuladas** de una variable estadística.

Ejemplos:

Número de llamadas diarias que se hacen por teléfono móvil

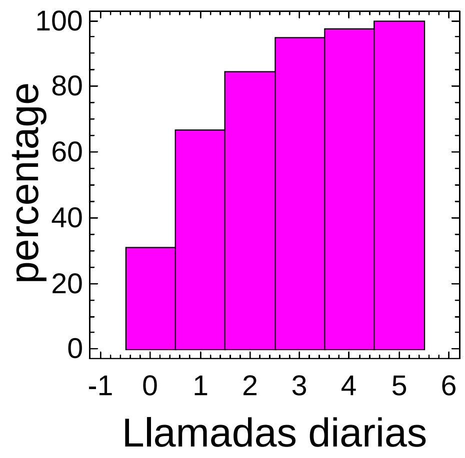
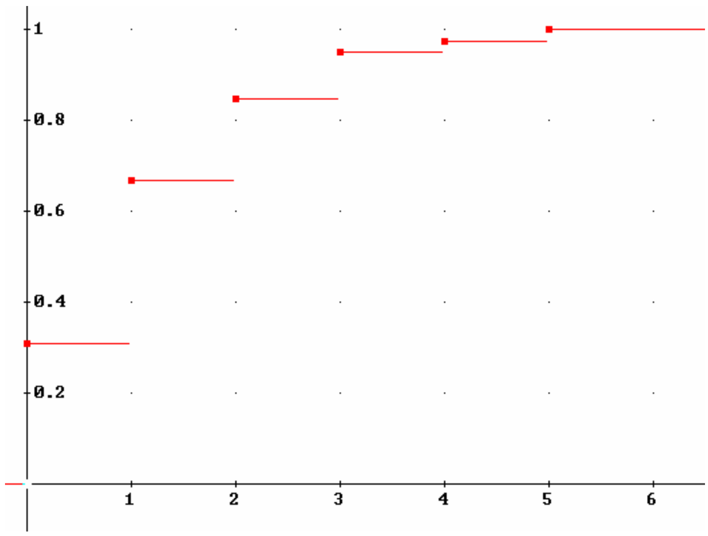
:y Table for Llamadas diarias

| Value | Frequency | Relative Frequency | Cumulative Frequency | Cum. Rel. Frequency |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 12 | 0,3077 | 12 | 0,3077 |
| 1 | 14 | 0,3590 | 26 | 0,6667 |
| 2 | 7 | 0,1795 | 33 | 0,8462 |
| 3 | 4 | 0,1026 | 37 | 0,9487 |
| 4 | 1 | 0,0256 | 38 | 0,9744 |
| 5 | 1 | 0,0256 | 39 | 1,0000 |

Si consideramos la v.a. X2: Número de llamadas diarias que hacen por teléfono móvil los estudiantes del GM23 (curso 200/05), podríamos tomar como

| **Distribución de probabilidad** | **Función de distribución** |
|---|---|
| P(X2 = 0)= 0.3077<br>P(X2 = 1)= 0.3590<br>P(X2 = 2)=0.1795<br>P(X2 = 3)=0.1026<br>P(X2 = 4)=0.0256<br>P(X2 = 5)=0.0256<br>$\sum_{n=0}^{5} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}2=\boldsymbol{n})=1$ | $F(x)=P(X2\le x)=\begin{cases} si\, x<0 \\ si\ \ 0\le x<1, P(X2=0) \\ si\ \ 1\le x<2, P(X2=0)+P(X2=1) \\ si\ \ 2\le x<3, P(X2=0)+...+P(X2=2) \\ si\ \ 3\le x<4, P(X2=0)+...+P(X2=3) \\ si\ \ 4\le x<5, P(X2=0)+...+P(X2=4) \\ si\ \ 5\le x, P(X2=0)+...+P(X2=5) \end{cases} = \begin{cases} 0 \quad si\, x<0 \\ 0.3077\ si\ \ 0\le x<1 \\ 0.6667\ si\ \ 1\le x<2 \\ 0.8462\ si\ \ 2\le x<3 \\ 0.9487\ si\ \ 3\le x<4 \\ 0.9744\ si\ \ 4\le x<5 \\ 1 \quad si\ \ 5\le x \end{cases}$ |

**Representaciones gráficas**

| **Histograma de frecuencias relativas acumuladas** | **Función de distribución** |
|---|---|
|  |  |

**Frecuencias relativas acumuladas ≈ Función de distribución**

***Función de distribución de una v.a. discreta.***

- La función de distribución de una v.a. discreta es una **función escalonada con "saltos" en los puntos de masa.**

- Cálculo de probabilidades a partir de la función de distribución de una v.a. discreta:

  Idea: hay probabilidad en aquellos puntos en los que hay "salto", y la probabilidad es precisamente la magnitud del "salto".

  Formalmente, si denotamos $F\left(x_o^-\right)=\lim_{x\to x_0^-} F\left(x\right)=P\left(X<x_o\right)$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

  1. $\boldsymbol{P\left(X=a\right)=F\left(a\right)-F\left(a^-\right)}$.
  2. $P\left(a<X\le b\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right),\forall a,b\in\mathbb{R}$.
  3. $P\left(a\le X\le b\right)=F\left(b\right)-F\left(a^-\right),\forall a,b\in\mathbb{R}$.
  4. $P\left(a<X<b\right)=F\left(b^-\right)-F\left(a\right),\forall a,b\in\mathbb{R}$.
  5. $P\left(a\le X<b\right)=F\left(b^-\right)-F\left(a^-\right),\forall a,b\in\mathbb{R}$.

Ejemplo:

*Si X es una v.a. con función de distribución* $\boldsymbol{F(x)}=\begin{cases} 0 & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x}<0 \\ 0.3 & \boldsymbol{si}\ 0\le \boldsymbol{x}<1 \\ 0.7 & \boldsymbol{si}\ 1\le \boldsymbol{x}<2.5 \\ 0.8 & \boldsymbol{si}\ 2.5\le \boldsymbol{x}<3 \\ 0.95 & \boldsymbol{si}\ 3\le \boldsymbol{x}<4 \\ 1 & \boldsymbol{si}\ 4\le \boldsymbol{x} \end{cases}$ *, hallar su distribución de probabilidad y las siguientes probabilidades P(X<2), P(1≤X<4).*

Hay **probabilidad en los puntos donde hay "salto"**: 0, 1, 2.5, 3 y 4. Sus probabilidades son la magnitud del "salto":

P(X=0)=0.3–0=0.3
P(X=1)=0.7–0.3=0.4
P(X=2.5)=0.8–0.7=0.1
P(X=3)=0.95–0.8=0.15
P(X=4)=1–0.95=0.05

Para hallar P(X<2), P(1≤X<4), lo más sencillo es ver qué puntos "con probabilidad" cumplen la condición dada:

P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0.3+0.4=0.7
P(1≤X<4)=P(X=1)+P(X=2.5)+P(X=3)=0.4+0.1+0.15=0.55

***Función de distribución de una v.a. continua.***

Ejemplo: Sea **Y2: error al redondear a un decimal.**

La función de densidad es $\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases} 10 & \boldsymbol{si}\ -0.05<\boldsymbol{x}<0.05 \\ 0 & \boldsymbol{resto} \end{cases}$.

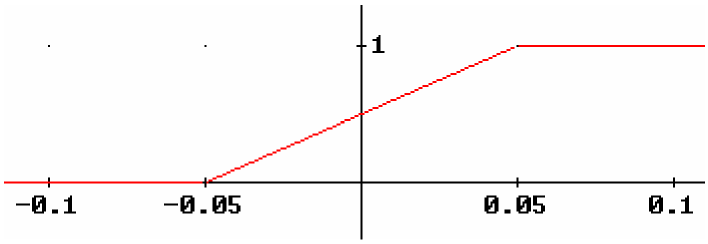
Por definición, su función de distribución es $F(x)=P(X\le x)$. Al ser una v.a. continua, las probabilidades se calculan a partir de la función de densidad:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ .$$

Como *f(x)* está definida a trozos, las probabilidades serán diferentes según el intervalo en donde se encuentre *x*:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} si\ x\le -0.05:\ \int_{-\infty}^{x} 0\ dt \\ si\ -0.05<x<0.05:\ \int_{-\infty}^{-0.05} 0\ dt+\int_{-0.05}^{x} 10\ dt \\ si\ x\ge 0.05:\ \int_{-\infty}^{-0.05} 0\ dt+\int_{-0.05}^{0.05} 10\ dt+\int_{0.05}^{x} 0\ dt \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\le -0.05, \\ 10\cdot(x+0.05) & si\ -0.05<x<0.05 \\ 1 & si\ x\ge 0.05 \end{cases}$$




Observamos que *F(x)* es una función continua, y que es una primitiva de la función de densidad, $F'(x)=f(x)$ (recuérdese el Teorema Fundamental del Cálculo).

Estas propiedades son generalizables para cualquier v.a. continua.

Si *X* es una v.a. continua con función de densidad *f*(x), y *F(x) es* la función de distribución de *X*, se verifica:

- $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ \forall x\in\mathbb{R}$
- *F* es una función continua.
- $F'(x)=f(x)$, en aquellos puntos en donde *f(x)* es continua.
- $P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a), \forall a,b\in\mathbb{R}$

Ejemplos:

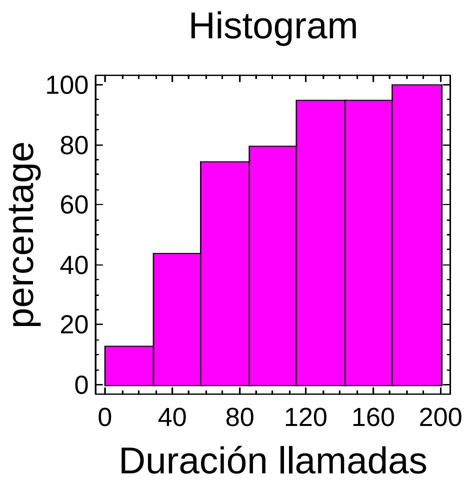
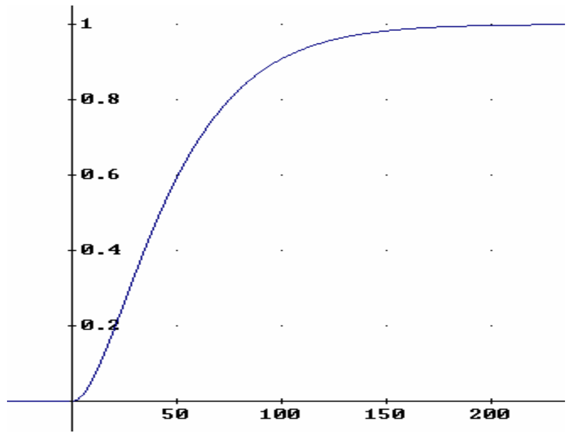
**Y3: tiempo máximo que he estado hablando por teléfono**

La función de densidad es $f(x)=(0.04)^2 xe^{-0.04x}\ \ si\ x\ge 0$; por tanto:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} si\ x<0,\ \int_{-\infty}^{x} 0\ dt \\ si\ x\ge 0,\ \int_{-\infty}^{0} 0\ dt+\int_{0}^{x}(0.04)^2 te^{-0.04t}dt \end{cases}=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 1-0.04e^{-0.04x}(x+25) & si\ x\ge 0 \end{cases}$$

Es una función continua, pues es continua en ambos tramos y éstos coinciden en x=0.

Además, es fácil comprobar que *F´(x)=f(x)*.

| Histograma de frecuencias relativas acumuladas | Función de distribución |
|---|---|
|   |   |

Para hallar probabilidades a partir de la función de distribución:

P(30<Y3<60) = F(60) – F(30) = 0.3542

P(Y3<45) = F(45) – F(–∞) = F(45) – 0 = F(45) = 0.5372

P(Y3≥60) = F(+∞) – F(60) = 1 – F(60) = 0.3084

**Observación:** En las v.a. continuas no influye que sea > ó ≥, pues en un punto aislado la probabilidad siempre es 0.

**Cálculo de la función de densidad a partir de la función de distribución.**

Las anteriores propiedades, en particular el que *F´(x)=f(x)*, nos permite calcular la función de densidad de una v.a. continua a partir de su función de distribución.

Por ejemplo, si $F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ 1-e^{-2x} & si\ x\geq 0\end{cases}$, es la función de distribución de una v.a., su función de densidad es $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ 2e^{-2x} & si\ x\geq 0\end{cases}$.

**Propiedades de las funciones de distribución (en general)**

1. $F(-\infty)=0$ y $F(+\infty)=1$.

2. *F* es monótona no decreciente.

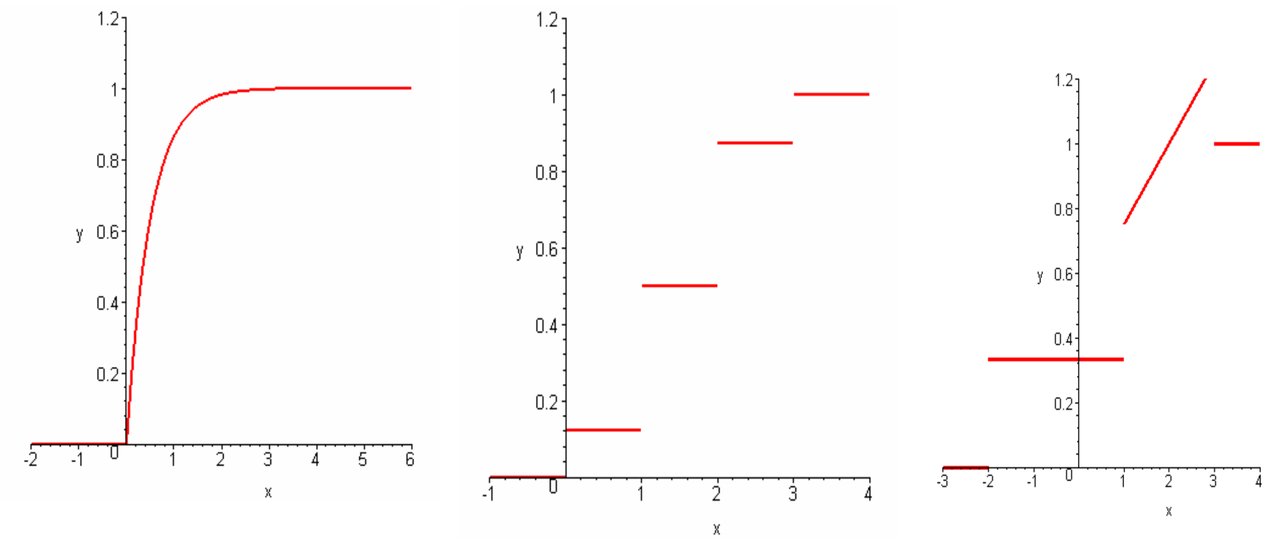
3. *F* es continua por la derecha.

**Teorema**. Una función *F*: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es función de distribución de una variable aleatoria *X* si y solo si *F* cumple las tres propiedades anteriores.

Ejemplo:

De las funciones representadas gráficamente a continuación, la de la derecha no es función de distribución pues no es monótona (entre 2 y 3 es mayor que 1, y luego decrece para valer 1 del 3 en adelante).

Las otras dos sí son funciones de distribución, la de la izquierda de una v.a. continua (pues continua) y la del centro de una v.a. discreta (escalonada).




## *3.6.- Transformaciones de variables aleatorias.*

Dada *X* una v.a., nos interesa estudiar *Y* = *g*(*X*) y obtener su distribución de probabilidad en el caso de que *Y* sea una v.a.

- si *X* es discreta, *Y* es discreta.
- si *X* es continua, *Y* puede ser discreta o continua, dependiendo de quién sea *g*.

El método general se basa en

$$P(Y = y) = P\left(X = g^{-1}(y)\right) \text{ o bien } P(Y \in B) = P\left(X \in g^{-1}(B)\right).$$

- si *Y* es discreta hallaremos su distribución de probabilidad y
- si *Y* es continua conviene trabajar con la función de distribución.

Ejemplos: Problemas 6 d) y 7.

## *3.7.- Independencia de variables aleatorias.*

Dos v.a. *X* e *Y* son **independientes** si el conocimiento de una de ellas no aporta información respecto de los valores de la otra.

La formalización de esta idea para v.a. se escapa de las posibilidades de este curso. Sí se utilizará la propiedad de que, cuando hay independencia, la **probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades**.

### *3.8.- Esperanza y varianza de funciones de variables aleatorias.*

Las **medidas de posición**, **dispersión** y **asimetría** que se estudiaron para variables estadísticas se pueden definir también de forma análoga para v.a.

***Medidas de posición***

frecuencia relativa

probabilidad

densidad

<table>
<tr><th>Medida de posición</th><th>Variable estadística</th><th colspan="2">V.a. discreta</th><th>V.a. continua</th></tr>
<tr><td>Media o esperanza</td><td>$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j=1}^{k} x_j \frac{n_j}{n}$</td><td colspan="2">$\mu = E(X) = \sum_{i\in I} x_i p_i$</td><td>$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>Propiedades de la media / esperanza</td><td>$\overline{aX+b} = a\overline{X}+b$<br>$\overline{a_1X_1+\ldots+a_nX_n} = a_1\overline{X_1}+\ldots+a_n\overline{X_n}$</td><td colspan="3">$E[aX+b] = aE[X]+b$<br>$E[a_1X_1+\ldots+a_nX_n] = a_1E[X_1]+\ldots+a_nE[X_n]$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mediana</td><td rowspan="2">Es un valor tal que, ordenados en magnitud los datos, el 50% es menor que él y el 50% mayor.</td><td colspan="3">$P(X < Me) \leq \frac{1}{2}$ $y$ $P(X > Me) \leq \frac{1}{2}$<br>Conocida la función de distribución F, buscamos Me tal que:</td></tr>
<tr><td colspan="2">v.a. discretas<br>$F(Me^-) \leq \frac{1}{2}$ $y$ $F(Me) \geq \frac{1}{2}$</td><td>v.a. continuas<br>$F(Me) = \frac{1}{2}$,</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cuantiles de orden α</td><td rowspan="2">Es un valor tal que, ordenados en magnitud los datos, el 100α% es menor que él y el resto mayor.</td><td colspan="3">$P(X < x_\alpha) \leq \alpha$ $y$ $P(X > x_\alpha) \leq 1-\alpha$<br>Conocida la función de distribución F, buscamos $x_\alpha$ tal que:</td></tr>
<tr><td>v.a. discretas<br>$F(x_\alpha^-) \leq \alpha$ $y$ $F(x_\alpha) \geq \alpha$</td><td colspan="2">v.a. continuas<br>$F(x_\alpha) = \alpha$</td></tr>
</table>

Ejemplos:

Hallar media, mediana y los cuartiles de:

**Y2: error al redondear a un decimal.**

Recordamos que la función de densidad es f(x)=10 si −0.05<x<0.05, y su función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq -0.05, \\ 10\cdot(x+0.05) & si\ -0.05 < x < 0.05 \\ 1 & si\ x \geq 0.05 \end{cases}.$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=\int_{-0.05}^{0.05} x\cdot 10\,dx=\left[10\frac{x^2}{2}\right]_{-0.05}^{0.05}=0$$

Para hallar la mediana, igual que en descriptiva mirábamos las frecuencias relativas acumuladas, ahora observamos los valores de la función de distribución; en concreto buscamos cuándo toma el valor 0.5. En este caso, buscamos el valor *Me* tal que:

F(*Me*)=0.5 ⇔ 10(*Me* +0.05)=0.5 ⇔ *Me*=0.

Para los cuarteles, buscamos:
$Q_1$: $F(Q_1)=0.25 \Leftrightarrow 10(Q_1+0.05)=0.25 \Leftrightarrow Q_1=-0.025$
$Q_3$: $F(Q_3)=0.75 \Leftrightarrow 10(Q_3+0.05)=0.75 \Leftrightarrow Q_3=0.025$.

(Si no se conoce la función de distribución, también se pueden hallar resolviendo las ecuaciones:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx=0.5 \Leftrightarrow \int_{-0.05}^{Me} 10\,dx=0.5 \Leftrightarrow 10(Me+0.05)=0.5 \Leftrightarrow Me=0$$

Análogamente se resolverían: $\int_{-\infty}^{Q1} f(x)dx=0.25$; $\int_{-\infty}^{Q3} f(x)dx=0.75$ .)

**X: número de caras al lanzar 3 monedas**

Recordamos su distribución de probabilidad y función de distribución:

| **Distribución de probabilidad** | **Función de distribución** |
|---|---|
| P(X = 0) = 1/8<br>P(X = 1) = 3/8<br>P(X = 2) = 3/8<br>P(X = 3) = 1/8 | $F(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x<0\\ 1/8 & si\ \ 0\le x<1\\ 4/8 & si\ \ 1\le x<2\\ 7/8 & si\ \ 2\le x<3\\ 1 & si\ \ 3\le x\end{cases}=\begin{cases}0 & si\ \ x<0\\ 0.125 & si\ \ 0\le x<1\\ 0.5 & si\ \ 1\le x<2\\ 0.875 & si\ \ 2\le x<3\\ 1 & si\ \ 3\le x\end{cases}$ |

Tenemos:

$$E(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)=1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=1.5$$

En el caso discreto, para hallar la **mediana** buscamos *Me* tal que:

$$F(Me^-)\le\frac{1}{2}\ \ y\ \ F(Me)\ge\frac{1}{2}$$

En este caso, como F(x)=0.5 si 1≤x<2, cualquier valor del intervalo [1,2) verifica la propiedad de la mediana. En estos casos, tomaremos como valor de la mediana el punto medio de dicho intervalo, ***Me=1.5***.

$\mathbf{Q_1}$=1:
Si buscamos F(x)=0.25, coincide con el "salto" en x=1; esto es equivalente a verificar:

$F(1^-)=0.125 \le 0.25$ y $F(1)=0.5 \ge 0.25$.

$\mathbf{Q_3}$=2:
Si buscamos F(x)=0.75, coincide con el "salto" en x=2 ; esto es equivalente a verificar:

$F(2^-)=0.5 \le 0.75$ y $F(2)=0.875 \ge 0.75$.

**Interpretación de las medidas de posición de una v.a.:**

**Y3: Tiempo máximo que he estado hablando por teléfono**

Hacemos los siguientes cálculos con DERIVE:

$$f(x) := 0.04^2 \cdot x \cdot \hat{e}^{-0.04 \cdot x}$$

$$\int_0^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = 50$$

$$F(x) := 1 - 0.04 \cdot \hat{e}^{-0.04 \cdot x} \cdot \left(x + \frac{1}{0.04}\right)$$

NSOLVE(F(x) = 0.5, x, 0, 100)

x = 41.95867478

NSOLVE(F(x) = 0.25, x, 0, 100)

x = 24.03196990

NSOLVE(F(x) = 0.75, x, 0, 100)

x = 67.31586456

Si la **media** es 50, quiere decir que tiempo medio que, como máximo, ha estado un estudiante hablando por teléfono es de 50 minutos.

Para los cuantiles, la interpretación se hace en términos de **probabilidad**:

- si la **mediana** es 41.96, se puede decir que:
  - la probabilidad de que el tiempo máximo de una llamada sea menor que 41.96 minutos es del 50%;
  - la probabilidad de que el tiempo máximo de una llamada sea mayor que 41.96 minutos es del 50%;
  - (redondeando) la probabilidad de que la máxima duración de una llamada sea mayor de 40 minutos es de más del 50%.
- si el **primer cuartil** es 24.03, se puede decir que:
  - la probabilidad de que el tiempo máximo de una llamada sea menor que 24.03 minutos es del 25%;
  - la probabilidad de que el tiempo máximo de una llamada sea mayor que 24.03 minutos es del 75%;
  - (redondeando) que la probabilidad de que el tiempo máximo de una llamada sea menor de 25 minutos es mayor del 25%.
- si el **tercer cuartil** es 67.31, se puede decir que:
  - la probabilidad de que el tiempo máximo de una llamada sea menor que 67.31 minutos es del 75%;
  - la probabilidad de que el tiempo máximo de una llamada sea mayor que 67.31 minutos es del 25%;
  - (redondeando) que la probabilidad de que el tiempo máximo de una llamada sea mayor que 1 hora, es de más del 25%.

**Teorema** Sea $X$ una variable aleatoria cualquiera y sea $Y$ = g($X$) una transformación de $X$ tal que $Y$ es una variable aleatoria. Entonces,

$$E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

Ejemplos: Problemas 6 d) y 7.

**Definiciones.**

Dada una v.a. *X* llamamos **momento respecto al origen de orden *k*** a

$$\alpha_k = E\left[X^k\right], \forall k = 1, 2, \ldots .$$

Dada una v.a. *X* con esperanza $\mu$ , llamamos **momento respecto a la media de orden *k*** a

$$\mu_k = E\left[\left(X-\mu\right)^k\right], \forall k = 1, 2, \ldots$$

La utilidad de los momentos de una variable aleatoria se verá más adelante en el tema de estimación puntual.

***Medidas de dispersión***

| Medida de dispersión | Variable estadística | V.a. discreta | V.a. continua |
|---|---|---|---|
| **Varianza** | $\mathbf{V(X)} = \sum (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{X}})^2 \frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{n}}$ | $V\left(X\right) = \sigma^2 = E\left[\left(X-\mu\right)^2\right]$ | |
| | | $= \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{x_j} - \mu)^2 \boldsymbol{p_j}$ | $= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$ |
| **Propiedades de la varianza** | • $V\left(X\right) \geq 0$.<br>• $V(X) = \frac{1}{\boldsymbol{n}} \sum_{i \in I} \boldsymbol{x_i}^2 - \overline{\boldsymbol{X}}^2$<br>• $V\left(aX+b\right) = a^2 V\left(X\right)$<br>• $V\left(X+Y\right) = V\left(X\right) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$ | • $V\left(X\right) \geq 0$.<br>• $V\left(X\right) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2$<br>• $V\left(aX+b\right) = a^2 V\left(X\right)$<br>• Si *X* e *Y* son **independientes**: $V\left(X+Y\right) = V\left(X\right) + V(Y)$ | |
| **Desviación típica** | $dt = \sqrt{V\left(X\right)}$ | $\sigma = \sqrt{V\left(X\right)}$ | |
| **Coeficiente de variación de Pearson** | $CV = \frac{dt}{\overline{X}}$ | $CV = \frac{\sqrt{V(X)}}{E\left[X\right]} = \frac{\sigma}{\mu}$ | |

Ejemplos:

Hallar varianza, desviación típica y coeficiente de variación de:

**1) X: número de caras al lanzar 3 monedas**

Recordamos su distribución de probabilidad: P(X=0)=P(X=3)=1/8; P(X=1)=P(X=2)=3/8; y que la esperanza es E(X)=1.5.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) + 3^2 \cdot P(X=3)\right) - \left(1.5\right)^2 =$$

$$= \left(1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8}\right) - \left(1.5\right)^2 = 0.75$$

Por tanto: V(X)= 0.75; $\sigma = \sqrt{V(X)}$ =0.866 ; CV= 0.866/1.5=0.58 (58%)

**2) Y2: error al redondear a un decimal.**

Recordamos que la función de densidad es f(x)=10 si –0.05<x<0.05, y su función de distribución

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \le -0.05, \\ 10\cdot(\boldsymbol{x}+0.05) & \boldsymbol{si}\ -0.05 < \boldsymbol{x} < 0.05 \\ 1 & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \ge 0.05 \end{cases}.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx\right) - 0^2 = \int_{-0.05}^{0.05} x^2 \cdot 10\, dx = \left[10\frac{x^3}{3}\right]_{-0.05}^{0.05} = 0.00083333$$

$\sigma = \sqrt{V(X)}$ =0.029 ;

En este caso, como E(Y2)=0, no tiene sentido hallar el coeficiente de variación.

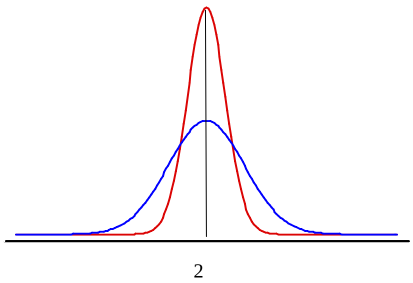
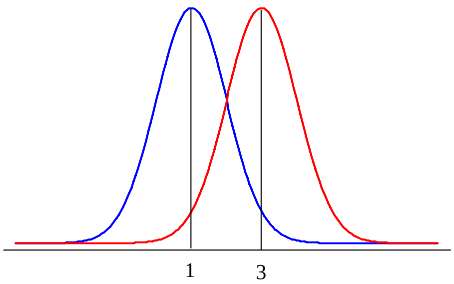
**3) Y3: tiempo máximo que he estado hablando por teléfono**

Teniendo que la densidad es $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (0.04)^2\, \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{-0.04x}$ $\boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} > 0$, calculamos V(Y3):

$$\int_0^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - 50^2 = 1250$$

Por tanto, V(Y3)=1250; $\sigma = \sqrt{12500}$ =35.35 minutos; CV= 35.35/50=0.71 (71%)

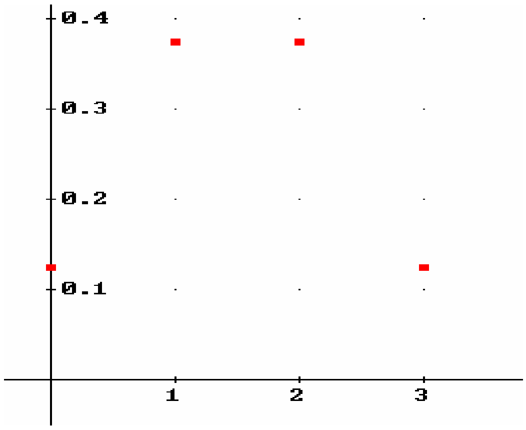
***Interpretación gráfica de la media y la desviación típica***

| | |
|---|---|
|  | Medias iguales y distinta desviación típica |
|  | Medias distintas e igual desviación típica |

***Medidas de asimetría***

| Medida de asimetría | Variable estadística | Variable aleatoria |
|---|---|---|
| **Coeficiente de asimetría de Pearson** | $\boldsymbol{CAP} = \dfrac{3(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Me})}{\boldsymbol{dt}}$ | $P = \dfrac{3(\mu - Me)}{\sigma}$ |
| **Coeficiente de asimetría de Fisher** | $\boldsymbol{CAF} = \dfrac{\frac{1}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} - \bar{\boldsymbol{X}})^3}{(\boldsymbol{dt})^3}$ | $F = \dfrac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3} = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ |
| **Interpretación** | • $CAP > 0$ ó $\mathrm{CAF} > 0$: asimétrica a la derecha<br>• $CAP < 0$ ó $CAF < 0$: asimétrica a la izquierda<br>• $CAP = 0$ ó $CAF = 0$: simétrica | • $P > 0$ ó $F > 0$: asimétrica a la derecha<br>• $P < 0$ ó $F < 0$: asimétrica a la izquierda<br>• $P = 0$ ó $F = 0$: simétrica |

Ejemplos:




**1) X: número de caras al lanzar 3 monedas**

Gráficamente se ve que la distribución es simétrica.

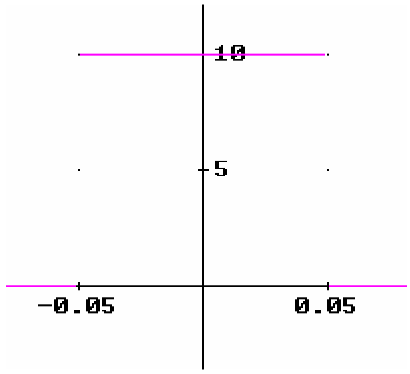
También se comprueba con los coeficientes:

CAP=0 pues E(X)=Me=1.5.

Además, también CAF=0, pues:

$$E\left((X-1.5)^3\right)=\left((0-1.5)^3\cdot P(X=0)+(1-1.5)^3\cdot P(X=1)+(2-1.5)^3\cdot P(X=2)+(3-1.5)^3\cdot P(X=3)\right)=$$

$$=\left((-1.5)^3\cdot\frac{1}{8}+(0.5)^3\cdot\frac{3}{8}+(0.5)^3\cdot\frac{3}{8}+(1.5)^3\cdot\frac{1}{8}\right)=0$$




**2) Y2: error al redondear a un decimal.**

Gráficamente se ve que la distribución es simétrica.

También se comprueba con los coeficientes:

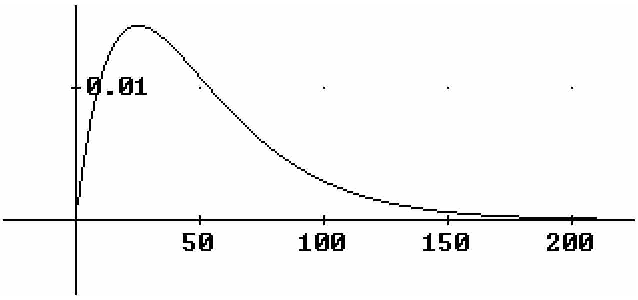
CAP=0 pues E(X)=Me=0.

Además, también CAF=0, pues:

$$E\left((X-0)^3\right)=E\left(X^3\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3 f(x)dx=\int_{-0.05}^{0.05}x^3\cdot 10\,dx=\left[10\frac{x^4}{4}\right]_{-0.05}^{0.05}=0$$

**3) Y3: tiempo máximo que he estado hablando por teléfono**

Observando la gráfica de la función de densidad se observa una clara **asimetría a la derecha**. Esto se corrobora calculando los **coeficientes**, que en ambos casos tienen valores **positivos**.




CAP= 3(50-41.95)/(35.35)= 0.68 > 0

Teniendo que la densidad es $f(x)=(0.04)^2 xe^{-0.04x}$ $si\ x>0$, el coeficiente de asimetría de Fisher, CAF, viene dado por:

$$\frac{\int_0^{\infty}(x-50)^3\cdot f(x)\,dx}{35.35^3}=1.414854443$$