SÍNTESIS DE LOS ANEXOS:

DISTRIBUCIÓN	DEFINICIÓN
Chi-cuadrado	$\chi_n^2 \sim \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, si $X_1,\ldots,X_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0,1)$
***t* de Student**	$t_n \sim \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, si $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi_n^2$ y son v.a. independientes
F de Snedecor	$F_{n,m} \sim \frac{X/n}{Y/m}$, si $X \sim \chi_n^2$, $Y \sim \chi_m^2$ y son v.a. independientes

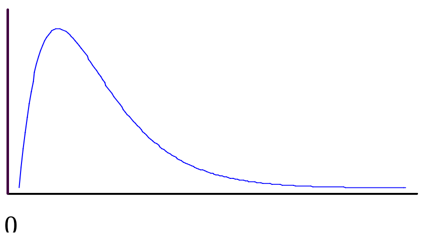
ANEXO 1: Distribuciones χ_n^2 y t_n.

A1.1. Distribución "Chi-cuadrado" de Pearson con n grados de libertad: χ_n^2.

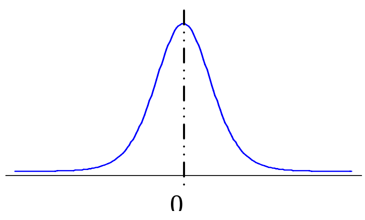
Si $X_1,\ldots,X_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0,1)$, entonces la v.a. $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ sigue una distribución de probabilidad denominada **"Chi-cuadrado" de Pearson con n grados de libertad** y lo denotamos:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$$

Se puede demostrar que $\chi_n^2 = \gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$. Por tanto, es siempre positiva y su gráfica, para n>2 tiene la forma:



χ_n^2 : Chi-cuadrado n grados de libertad



t_n : t de Student con n grados de libertad

A1.2. Distribución t de Student, t_n, con n grados de libertad:

Si $X_0, X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución $N(0,1)$ y se considera la v.a. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$, entonces la v.a. $\dfrac{X_0}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$ sigue una distribución denominada ***t* de Student con *n* grados de libertad** y se denota:

$$\frac{X_0}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$$

El número de grados de libertad de la t_n es el mismo que el de la χ^2 que interviene en su definición.

- Esta v.a. toma valores en todo $\mathbb{R}$,
- es simétrica respecto del 0
- su gráfica tiene una forma análoga a la normal, aunque algo más achatada
- Se puede demostrar que $t_n \to N(0,1)$, cuando *n* tiende a infinito
- sólo hay tablas de t_n hasta *n*=120; para valores mayores, se considera $t_n \approx N(0,1)$

A1.3. Teorema de Fisher.

Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a.s. de una v.a. *X* con distribución $N(\mu, \sigma)$ entonces:

(1) $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ son independientes.

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

A1.4. Obtención del pivote para IC(μ) en poblaciones normales.

Como consecuencia de este resultado y de la definición de t_n, en las condiciones anteriores (m.a.s. de una v.a. *X* con distribución $N(\mu, \sigma)$) se verifica que:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

En efecto:

- Por ser v.a. con distribución normal, se tiene que $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ y $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$, y además son v.a. independientes (teorema de Fisher).
- La definición de la *t* de Student es $\dfrac{X_0}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}} \sim t_n$, siendo $X_0 \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi_n^2$.

Si llamamos $X_0 = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ e $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, podemos construir una *t*-Student

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)}{n-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

que elimina la influencia de σ.

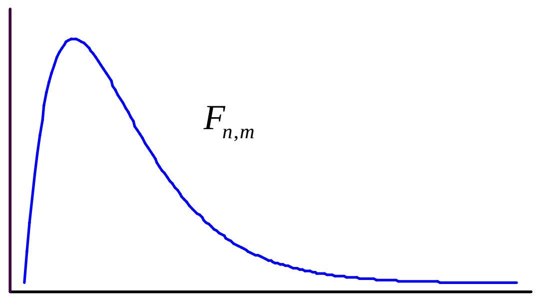
ANEXO 2: Distribución $F_{n,m}$

A2.1. Definición.

Si $X \sim \chi_n^2$ e $Y \sim \chi_m^2$ son v.a. independientes, la v.a. $\frac{X/n}{Y/m}$ sigue una distribución denominada **F de Snedecor con *n,m* grados de libertad**, y de denota:

$$\frac{X/n}{Y/m} \sim F_{n,m} .$$

Su gráfica es similar a la de una Gamma:



Propiedad: Si $T \sim F_{n,m}$, entonces $\frac{1}{T} \sim F_{m,n}$.

Esta propiedad, también se puede denotar como $F_{n,m} = \frac{1}{F_{m,n}}$

A2.2. Obtención del pivote para el intervalo de confianza para el cociente de varianzas:

Consideramos que *X* e *Y* son v.a. independientes tales que $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$.

Sean $(X_1, \dots , X_{nx})$, $(Y_1, \dots , Y_{ny})$, m.a.s. de *X* e *Y* respectivamente, siendo n_x el tamaño de la muestra de *X* y siendo n_Y el tamaño de la muestra de *Y.*

S_X^2 , S_Y^2 son las cuasivarianzas muestrales de *X* e *Y* respectivamente.

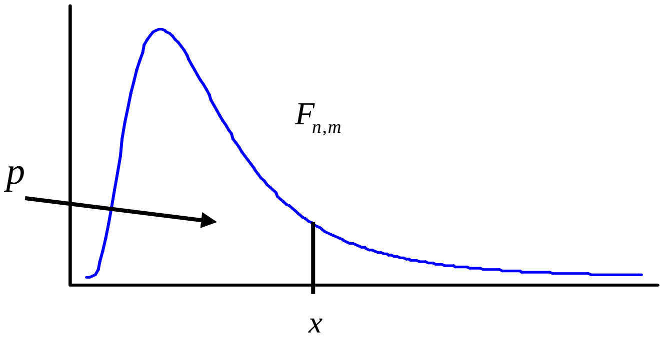
Aplicamos el Teorema de Fisher a las dos muestras y tenemos:

$$\frac{(n_X - 1) S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2_{n_X - 1} \;;\; \frac{(n_Y - 1) S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{n_Y - 1} .$$

Como *X* e *Y* son v.a. independientes, las anteriores v.a. también son independientes y podemos aplicar la definición de la distribución F de Snedecor:

$$\frac{\dfrac{(n_X-1)S_X^2}{\sigma_X^2}\Big/(n_X-1)}{\dfrac{(n_Y-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2}\Big/(n_Y-1)}=\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}=\frac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}\sim F_{n_X-1,n_Y-1}$$

A2.3. Obtención de valores en las tablas de $F_{n,m}$.

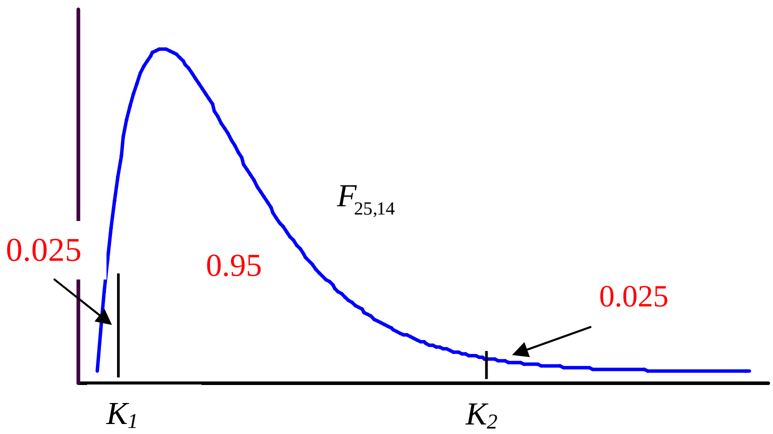


Las tablas de la *F* de Snedecor, nos dan valores de $P(F_{n,m}\le x)=p$, con $\boldsymbol{p\geq 0.5}$.

Como la distribución *F* de Snedecor no es simétrica, para hallar los valores *x* tal que $P(F_{n,m}\le x)=p$, con $p<0.5$, se utiliza la propiedad: $F_{n,m}=\dfrac{1}{F_{m,n}}$ $(*)$

Por ejemplo, si queremos hallar **valores** $K_1,K_2\in\mathbb{R}$**, tales que** $P(K_1\le F_{25,14}\le K_2)=0.95$, lo haremos de la siguiente forma:

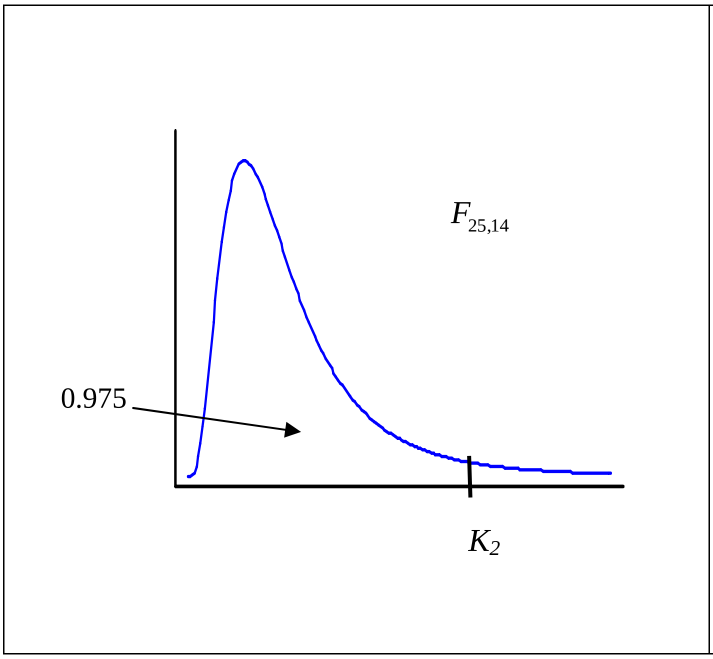
i) Hallamos $K_2\in\mathbb{R}$**, tal que** $P(F_{25,14}\le K_2)=0.975$ $(=0.025+9.95)$. Tablas: $K_2=2.7777$

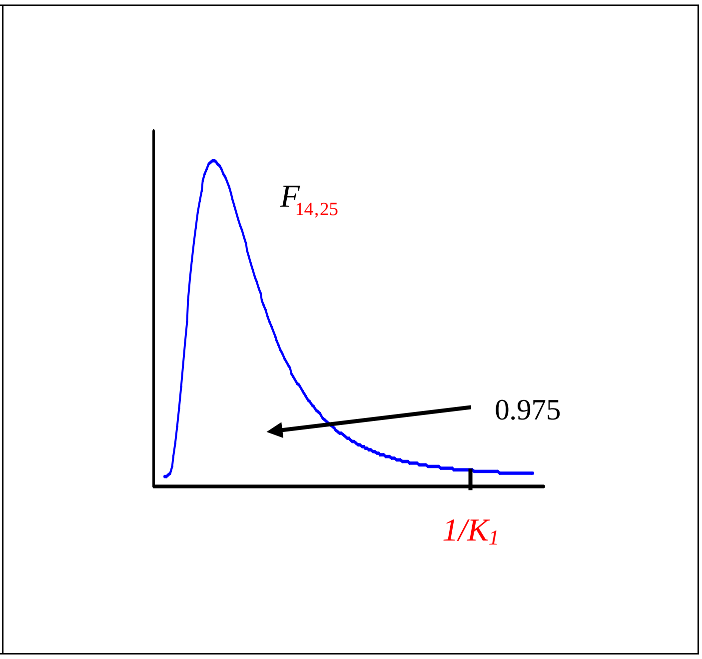


ii) Hallamos $\boldsymbol{K_1 \in \mathbb{R}}$**, tal que** $\boldsymbol{P\left(F_{25,14} \le K_1\right)} = 0.025$**.** Como no hay tablas para *p*=0.025, haremos lo siguiente:

- $P\left(F_{25,14} \le K_1\right) \underset{(*)}{=} P\left(\dfrac{1}{F_{14,25}} \le K_1\right) = P\left(F_{14,25} \ge \dfrac{1}{K_1}\right) = 0.025$, y esto es equivalente a buscar $P\left(F_{14,25} \le \dfrac{1}{K_1}\right) = 0.975$
- Buscamos en la tabla el valor $x = \dfrac{1}{K_1}$ tal que $P\left(F_{14,25} \le x\right) = 0.975$: $x = 2.4413$.
- Hallamos K_1: $x = \dfrac{1}{K_1} = 2.4413 \Rightarrow K_1 = \dfrac{1}{2.4413} = 0.4096$.

iii) Por tanto, tenemos $\boldsymbol{P}\left(0.4096 \le \boldsymbol{F_{25,14}} \le 2.7777\right) = 0.95$**.**





.